Théorème d'Hadamard-Lévy

Leçon : 203, 204, 214, 215, 220

Réf : Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements
J. Bernis. L. Bernis (ou Zuily-Queffélec)

Théorème 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Sont équivalentes :

1) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible et $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty$

Preuve

1) ⇒ 2) On a $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$d(f^{-1} \circ f)(x) = id_{\mathbb{R}^n}$, donc $id_{\mathbb{R}^n} = d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x)$. (TFC).

Ainsi $df(x)$ est inversible d'inverse $df^{-1}(f(x))$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors $f^{-1}(K)$ est un compact, car c'est l'image de K par l'application continue f^{-1}.

Donc f propre.

Détail f propre $\overset{\text{déf}}{\iff} \forall K$ compact de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ compact, et f continue

$\overset{(*)}{\iff} \lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

(*) ⇒ Soit $R > 0$, et $K = \overline{B(0,R)}$. Alors $f^{-1}(K)$ est un compact.

Donc il existe $r > 0$ tq $f^{-1}(K) \subset \overline{B(0,r)}$.

Ainsi, si $f(x) \in K$ alors $x \in \overline{B(0,r)}$.

Donc $\|f(x)\| \leq R \Rightarrow \|x\| \leq r$.

Donc si $\|x\| \to +\infty$, alors $\|f(x)\| \to +\infty$.

⇐ Si $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Soit K compact de $\mathbb{R}^n$. $f^{-1}(K)$ est fermé car f est continue. Si $f^{-1}(K)$ n'est pas borné, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $f^{-1}(K)$ tq $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Donc $\|f(x_n)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Or $(f(x_n))_n \in K$ → borné. Contradict°.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible et f propre.

Quitte à poser $\tilde{f} = f - f(0)$, on suppose que $f(0) = 0$.
(les hypothèses restent inchangées).

df est inversible en tout point, donc f est un C^1-difféomorphisme local.
Si on montre que f est bijective, alors par le théorème d'inversion globale, f sera un C^1-difféo global.

Étape 1 : Trouver un inverse à droite pour f.

Heuristique : on veut $f \circ s(t,x) \overset{(*)}{=} tx$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et I intervalle ouvert contenant 0 et 1. On aura alors $f \circ s(1,x) = x$.

(*) s vérifie ceci ssi (par dérivation)

$$df(s(t,x)) \circ \partial_t s(t,x) = x \quad \text{et} \quad f \circ s(0,x) = 0$$
$$= \frac{d}{dt}(f \circ s(t,x))$$

$$\iff \partial_t s(t,x) = (df(s(t,x)))^{-1}(x) \quad \text{et} \quad s(0,x) \in f^{-1}(\{0\}).$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(\cdot, x) \text{ solut}^{\circ} \text{ de } \begin{cases} y' = (df(y))^{-1}(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On considère le problème de Cauchy (autonome) $\begin{cases} y' = F_x(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (C_x). sur I intervalle ouvert contenant 0 et 1.

(où $x \in \mathbb{R}^n$ est fixé)

L'application $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto F_x(y) = (df(y))^{-1}(x)$ est de classe C^1 c'est la composition de :

- $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto x$ ou y
- $\mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $y \mapsto df(y)$, C^1 car f est C^2
- $GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $\ell \mapsto \ell^{-1}$, C^1
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(\ell, x) \mapsto \ell(x)$ C^1 car bilinéaire en dimension finie.

Donc en particulier, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $F_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1.
Par le théorème de Cauchy-Lipschitz : il existe une unique solution maximale de (C_x), on la note s_x, définie sur un ouvert $]m_x, n_x[$

contenant 0.

Montrons que $T_x \geq 1$. Par l'absurde, si $T_x < 1$, alors par le théorème des bouts, $\lim\limits_{t\to T_x} \|r_x(t)\| = +\infty$.

Or, f est propre, donc $\lim\limits_{t\to T_x} \|f\circ r_x(t)\| = +\infty$.

Mais
$$\frac{d}{dt}(f\circ r_x(t)) = df(r_x(t))\circ r_x'(t)$$
$$= df(r_x(t))\circ (df(r_x(t)))^{-1}(x)$$
$$= x$$

donc, comme $f\circ r_x(0) = f(0) = 0$, on a $\boxed{f\circ r_x(t) = tx.}$

Ainsi $\lim\limits_{t\to T_x} |t|\cdot\|x\| = +\infty$, ce qui est absurde.

Donc $T_x \geq 1$.

On peut donc définir $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comme étant $\varphi : x \mapsto r_x(1)$.

Par régularité du flot, (thm Cl à paramètres) $(x,t)\mapsto r_x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc φ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Et on a donc $\boxed{f\circ\varphi = id_{\mathbb{R}^n}}$. (être au point sur la régularité du flot, consulter si c'est la 220).

Étape 2 Mq f est une bijection.

- f surjective : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(y) = x$ avec $y = \varphi(x)$.
- f injective : argument de connexité.

On va montrer que φ est surjective : $\varphi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ est connexe, on va donc mq $\varphi(\mathbb{R}^n)$ est :
- non vide
- fermé
- ouvert

a) $\mathbb{R}^n$ non vide donc $\varphi(\mathbb{R}^n)$ non vide ...

b) $\varphi(\mathbb{R}^n)$ fermé. Soit $(x_n)_n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ tq $\varphi(x_n) \to y \in \mathbb{R}^n$.

Alors, par continuité de f, $f\circ\varphi(x_n) \to f(y)$.

On $f\circ\varphi(x_n)=x_n$, donc $x_n \to f(y)$.

Donc par continuité de φ, $y = \lim\limits_n \varphi(x_n)$

$= \varphi(\lim\limits_n x_n)$

$= \varphi(f(y))$.

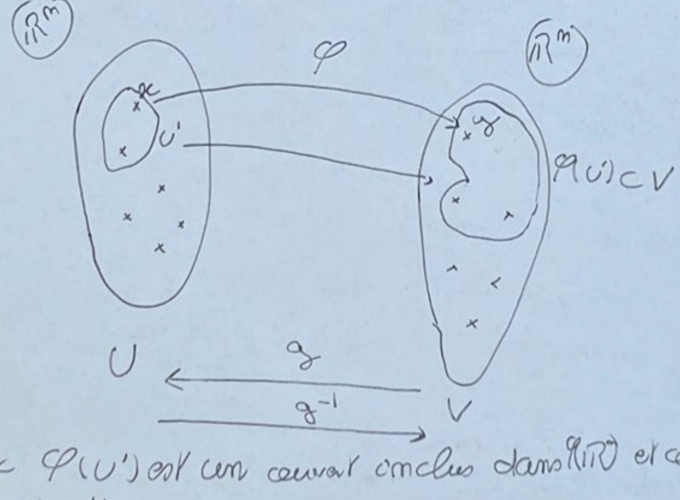
Donc $y \in \varphi(\mathbb{R}^n)$: $\varphi(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

c) $\varphi(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. Soit $y \in \varphi(\mathbb{R}^n)$, et donc $x \in \mathbb{R}^n$ tq $\varphi(x)=y$. $df(y)$ est inversible donc par le TIL, il existe un voisi. ouvert U de x et un voisi. ouvert V de y tq f induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme g de V sur U (car $f(y)=x$).

Par continuité de φ, il existe U' voisi. ouvert de x tq $\varphi(U') \subset V$.

Ainsi $\varphi(U') = g^{-1}(\underbrace{g(\varphi(U'))}_{\substack{\subset V \text{ donc correct,} \\ g^{-1} : V \to U}}) = g^{-1}(U')$

Mais $y \in \varphi(U') = g^{-1}(U')$ et $g^{-1}(U')$ ouvert car image réciproque de U' par g^{-1}, continue.



Donc $\varphi(U')$ est un ouvert inclus dans $\varphi(\mathbb{R}^n)$ et contient y, donc $\varphi(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.

Par connexité de $\mathbb{R}^n$, $\underline{\varphi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n}$

Ainsi f injective : en effet, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors il existe $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x_1 = \varphi(y_1)$ et $x_2 = \varphi(y_2)$.

Donc $f \circ \varphi(y_1) = f \circ \varphi(y_2)$, et donc $y_1 = y_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

<u>Ccl</u> : f bijective, $\mathcal{C}^1$, $\forall x$ $df(x)$ inversible,

$\Longrightarrow$ f $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Commentaires</u>

- vrai si f $\mathcal{C}^1$, + compliqué à montrer.
- essayer de bien comprendre l'idée derrière l'EDO : trajectoire, ...